Diskussion einer Abituraufgabe in Zeiten der Bildungsstandards

ANDREAS PRÖMMEL, GOTHA; ANNA SCHÄFER, PADERBORN; PETRA WOITHE, DRESDEN

Zusammenfassung: *Der Arbeitskreis (AK) Stochastik der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik analysierte auf seiner Herbsttagung 2014 in Paderborn Abituraufgaben verschiedener Bundesländer auf der Grundlage seines Standpunktpapiers zur „Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II“. Die dabei von den Autoren und den Teilnehmern der Tagung diskutierten Positionen zur künftigen Gestaltung von Abituraufgaben im Bereich Stochastik sollen hier exemplarisch zusammengefasst werden.*

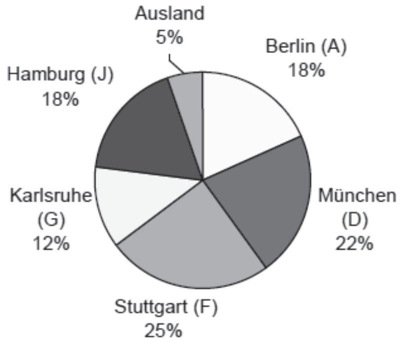
1 Einleitung

Bei der diskutierten Aufgabe handelt es sich um das Abitur 2004, Grundkurs Bayern (siehe Original-Aufgabenstellung rechts). Die Aufgabe wurde insgesamt als sehr textlastig empfunden. Hinter der Einkleidung verbergen sich gängige Grundaufgaben, die hauptsächlich kalkülmäßig zu bearbeiten sind, wobei der Sachzusammenhang beliebig austauschbar ist. Obwohl es für einen Grundkurs angemessen erscheint, überwiegend Grundfertigkeiten zu reproduzieren, sollten Teilaufgaben zum Beurteilen von Situationen und zum Interpretieren von Daten nicht fehlen. Durch andere Aufgabenformate, wie Multiple-Choice-Aufgaben zur Beurteilung von Ergebnissen oder Aussagen, könnte zudem die Textfülle reduziert werden. Eine klare Trennung in einen Aufgabenteil 1, der auf der Modellebene arbeitet (z. B. mit Urnenmodellen, Glücksrädern und exakt beschriebenen stochastischen Bedingungen unter gezielter Verwendung der Fachsprache) und einen Aufgabenteil 2, der einen Kontext heranzieht und beurteilt, scheint den verschiedenen Anforderungsbereichen am besten gerecht zu werden.

Der Realitätsbezug wird derzeit in Prüfungsaufgaben aus Gründen des zeitlichen Rahmens und der Eindeutigkeit der Aufgabenstellung nur verkürzt abgebildet werden können. Eine ausführliche Diskussion der Modellierung und der Recherche des Kontextes ist unter den gegebenen Prüfungsbedingungen nicht machbar. In einem anderen Prüfungsformat, z. B. in einer Kombination von Einzel- und Gruppenprüfung, könnte dies jedoch umgesetzt werden. Gerade für Abschlussprüfungen mit dem verpflichtenden Einsatz eines digitalen Werkzeuges wäre solch ein Format durchaus wünschenswert.

Euro-Münzen werden in Deutschland an fünf verschiedenen Prägestätten hergestellt. Der Prägeort wird durch einen Kennbuchstaben auf der Münze angegeben (Zuordnung siehe Diagramm).

Für die sich in Deutschland im Umlauf befindenden 2-Euro-Münzen werden unter Einbeziehung ausländischer Münzen folgende Anteile angenommen:



Man geht von einer guten Durchmischung der Euro-Münzen in Deutschland aus.

Aufgabe 1

a) In Deutschland sind 230 Millionen 2-Euro-Münzen mit dem Prägeort Hamburg im Umlauf. Berechnen Sie, wie viele 2-Euro-Münzen insgesamt in Deutschland im Umlauf sind (Rundung auf Millionen). Wie groß ist der Anteil der 2-Euro-Münzen mit Prägeort Berlin unter allen deutschen 2-Euro-Münzen?

b) Brigitte hat fünf 2-Euro-Münzen im Geldbeutel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau drei mit Prägeort München dabei?

c) Beschreiben Sie kurz ein zum Sachzusammenhang passendes Zufallsexperiment und dazu ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit $3! \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}12$ beträgt.

d) Dieter sammelt 2-Euro-Münzen. Er untersucht die nächsten 2-Euro-Münzen, die er bekommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entdeckt er bei der fünften untersuchten Münze zum zweiten Mal den Kennbuchstaben D?

e) Wie viele 2-Euro-Münzen muss Dieter mindestens untersuchen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine ausländische 2-Euro-Münze findet?

Aufgabe 2

a) Dieter bewahrt fünf verschiedene deutsche 2-Euro-Münzen und sechs verschiedene ausländische 2-Euro-Münzen in einem Kästchen auf. Er greift blind in das Kästchen und hat fünf Münzen in der Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau zwei deutsche 2-Euro-Münzen?

b) Er legt nun alle elf verschiedenen Münzen nebeneinander auf den Tisch. Auf wie viele verschiedene Arten kann er sie anordnen, wenn die fünf deutschen 2-Euro-Münzen nebeneinander liegen sollen?

Aufgabe 3

Ein Münzhändler behauptet, dass eine große Urne, die mit sehr vielen 1-Cent-Münzen gefüllt ist, mindestens 10 % finnische 1-Cent-Münzen enthält. Diese haben als einzige Münzen in der Urne Sammlerwert.

a) Dieter zahlt 15 € und darf dafür 20 Münzen aus der Urne ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht das Geschäft für Dieter günstig aus, falls 10 % finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind und Dieter einen Sammlerwert von 6 € für eine solche Münze ansetzt?

b) Dieter äußert Skepsis gegenüber der Behauptung des Münzhändlers. Dieser bietet Dieter an, die Hypothese, dass mindestens 10 % finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind, mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang 200 zu testen. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese irrtümlich abgelehnt wird, höchstens 5 % sein soll.

2 Diskussion der Aufgaben

Dieser Abschnitt spiegelt wesentliche Ergebnisse der Diskussion in der Gruppe und im Plenum des AK zu einzelnen Aufgaben bzw. Aufgabenteilen wider.

Zum Einstieg in die Aufgabe 1 wurden zwei Sichtweisen diskutiert: Einerseits wird ein leichter Einstieg (Anforderungsbereich I) der Prüfungssituation am ehesten gerecht. Andererseits erscheinen die Vorgaben zur Verteilung der Münzen fragwürdig. Es wurde daher der Vorschlag diskutiert, eine Stichprobe vorzugeben und die Bedingungen zu betrachten, die angenommen werden müssen, um diese Daten für das Münzvorkommen in Deutschland zu Grunde zu legen. Dabei entstehen jedoch andere Probleme: ein Ziehen mit Zurücklegen (oder eine sehr große Münzsammlung) müsste unterstellt werden bzw. die Zufälligkeit des Vorgangs (beim Ziehen aus einer geordneten Sammlung) müsste gegeben sein.

Da im Aufgabenteil 1b) nur Grundlegendes reproduziert wird, scheint ein Multiple-Choice-Format sinnvoll. Offen bleibt, ob die 5 Münzen auch als wohldurchmischt angenommen werden können?

Die Aufgabenumkehr im Teil 1c) wird positiv bewertet und stellt einen mittleren Anforderungsbereich dar. Auch Beschreibungen, die einen anderen Sachverhalt zugrunde legen, müssten zugelassen werden. Man könnte daher auf der Modellebene bleiben.

Auch in Aufgabe 1e) geht es nur darum, die geübte Grundaufgabe im Text zu entdecken und abzuarbeiten. Das Verständnis würde geprüft, wenn der Ansatz in Bezug auf den Sachzusammenhang begründet werden muss.

In Aufgabe 2 werden nur Grundaufgaben zur Kombinatorik abgefragt, die auf eine Einkleidung verzichten könnten bzw. entbehrlich wären.

In Aufgabe 3, dem Testen von Hypothesen, sollten die Schüler auf jeden Fall zum Interpretieren und zum Beurteilen angehalten werden. Dazu könnten in einer Teilaufgabe zu einer Stichprobe Aussagen vorgeben werden, die begründend mit wahr oder falsch zu beurteilen sind.

Der Vorschlag einer Trennung der Aufgabenteile in eine Modellebene und eine Kontextebene soll im Folgenden konkretisiert werden.

3 Modellebene I

Die Beschreibung des Sachzusammenhanges einschließlich der Abbildung dient als Grundlage für ein Urnenmodell mit 100 Kugeln, die sich entsprechend der Häufigkeit der Prägebuchstaben zusammensetzen: 18xA, 22xD, 25xF, 12xG, 18xJ und fünf Kugeln ohne Beschriftung für die ausländischen Münzen. Mit diesem Urnenmodell lassen sich nun typische Aufgabenstellungen zu Zufallsexperimenten bearbeiten, von denen wir einige vorschlagen:

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Beide Kugeln haben die gleiche Beschriftung, wenn 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

B: Alle Kugeln sind mit A beschriftet, wenn 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden.

C: Genau eine Kugel ohne Beschriftung wird gezogen, wenn man 3 Kugeln mit einem Griff zieht.

D: Beim fünfmaligen Ziehen ohne Zurücklegen wird eine Kugel ohne Beschriftung erst bei der fünften Ziehung gezogen.

E: Beim fünfmaligen Ziehen mit Zurücklegen erhält man bei der fünften Ziehung zum zweiten Mal den Buchstaben D.

Aufgabe 2: Beschreiben Sie ein passendes Zufallsexperiment und dazu ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit $3! \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}12$ beträgt.

4 Modellebene II

Bleibt man zunächst noch auf der Modellebene, dann lassen sich Aufgaben zu Zufallsgrößen und zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen (meist Binomialverteilung und deren innermathematische Anwendungen, wie Wartezeitprobleme, etc.) formulieren. Eine dazu passende Aufgabenstellung könnte, in Anlehnung an die Original-Abituraufgabe, folgendermaßen lauten:

Aufgabe 3: Wie viele Kugeln muss man unter Annahme eines Binomialmodells mindestens untersuchen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % wenigstens eine Kugel ohne Beschriftung findet?

5 Kontextebene I

Unter Einbeziehung des realen Kontextes bieten sich nun Aufgabenstellungen an, die sich auf die Ermittlung von Anteilen oder auf die Interpretation von Häufigkeitsverteilungen beziehen.

Aufgabe 4: Ermitteln Sie den Anteil der 2-Euro-Münzen mit Prägeort Berlin unter allen deutschen 2-Euro-Münzen. Der Anteil beträgt:

❑ 24,25 % ❑ 18,00 % ❑ 18,95 %

Kreuzen Sie an und begründen Sie.

6 Kontextebene II

Die Problematik des Stichprobenziehens und der Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit gehören zum Curriculum der Sekundarstufe II. Dabei steht viel zu oft das rein schematische Abarbeiten von Annahme- und Ablehnungsbereichsbestimmungen und von Fehlerberechnungen im Fokus. Inhaltliche Aspekte des Testens von Hypothesen oder des Umgangs mit Konfidenzintervallen kommen oft zu kurz. Die folgende Aufgabenstellung, die die ursprüngliche Aufgabe 3b) ergänzen soll, stellt eine Möglichkeit dar, solche inhaltlichen Ideen mehr in den Vordergrund zu rücken.

Aufgabe 5: In einer Stichprobe vom Umfang $n = 200$ sind neun finnische 1-Cent-Münzen aufgetreten. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie.

- ❑ Die Nullhypothese ist mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit falsch.
- ❑ Damit wurde bewiesen, dass weniger als 10 % finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind.
- ❑ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 10 % oder mehr finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind, ist sehr gering.
- ❑ Unter der Annahme, dass 10 % oder mehr finnische 1-Cent-Münzen in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Stichprobe mit höchstens 12 finnischen 1-Cent-Münzen maximal 5 %.

Damit wird die wichtige, aber häufig vernachlässigte Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests aufgegriffen, die nicht nur Lehrern und Schülern, sondern auch Wissenschaftlern enorme Probleme bereitet (vgl. z. B. Gigerenzer 2001).

7 Rückschau

Im Hinblick auf die mit den Bildungsstandards geänderten Anforderungen für das Lernen und Lehren von Stochastik in der Schule erscheint es den Autoren wichtig, dass sich dies auch in einer geänderten Aufgabenkultur in den Abschlussprüfungen widerspiegelt. Eine umsetzbare Idee ist die Trennung in Aufgabenstellungen der Modellebene und der Kontextebene. Damit erscheint es möglich, auch in Zeiten des Einsatzes von digitalen Geräten angemessene Prüfungsbedingungen in der gymnasialen Oberstufe zu gewährleisten (Borneleit et al. 2001).

Literatur

Biehler, R. et al. (2010). Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II – Kompetenzprofile für die Bildungsstandards aus Sicht der Stochastik und ihrer Didaktik. http://stochastik-in-der-schule.de/Dokumente/Leitidee_Daten_und_Zufall_SekII.pdf. (Zugriff: 28.01.2016)

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. http://ne.lo-net2.de/selbstlern-material/m/abi/KMK/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf. (Zugriff: 28.01.2016)

Borneleit, P. et al. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik* 22(1), S. 73–90.

Gigerenzer, G.; Krauss, S. (2001). Statistisches Denken oder statistische Rituale: Was sollte man unterrichten? In: M. Borovcnik, J. Engel und D. Wickmann (Hrsg.). *Arbeitsbericht des AK Stochastik 1999/2000,* Hildesheim: Franzbecker, S. 53–62.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: Abituraufgabe 2004. Mathematik als Grundkursfach. http://www.isb.bayern.de/down-load/6048/mathgk04.pdf. (Zugriff: 28.01.2016)

Anschrift der Verfasser

Andreas Prömmel
Gymnasium Ernestinum Gotha
Bergallee 8
99867 Gotha
aproemmel@me.com

Anna Schäfer
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburger Str. 100
33098 Paderborn
annascha@math.upb.de

Petra Woithe
Didaktik der Mathematik
TU Dresden
01062 Dresden
petra.woithe@tu-dresden.de